

Multiplicador de Lagrange num problema com restrição não constante no gradiente

Assis Azevedo^a

Fernando Miranda^a

Lisa Santos^a

^aDepartamento de Matemática e Aplicações e Centro de Matemática, Universidade do Minho, Portugal

Informação	Resumo
<p><i>Palavras-chave:</i> inequação variacional restrição no gradiente multiplicador de Lagrange</p> <p><i>Publicação original:</i> Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, Número especial, julho de 2012, 19–22 Boletim SPM</p>	<p>Prova-se a existência de solução, num sentido generalizado, de um problema com um multiplicador de Lagrange, para uma restrição arbitrária no gradiente e condição de Dirichlet homogénea na fronteira. Prova-se ainda a equivalência deste problema com a correspondente inequação variacional elíptica. A abordagem utilizada para provar o resultado de existência baseia-se na utilização de soluções de uma família aproximante de equações quasilineares elípticas.</p>

1 Formulação do problema

Seja Ω um aberto limitado de \mathbb{R}^N com fronteira lipschitz Γ . Dado $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ não negativo, definimos o convexo fechado

$$\mathbb{K} = \{v \in H_0^1(\Omega) : |\nabla v| \leq \varphi \text{ q.s. em } \Omega\}$$

e a inequação variacional

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) \geq \int_{\Omega} f(v - u), \quad \forall v \in \mathbb{K}. \quad (1)$$

Dado $f \in L^2(\Omega)$, considere-se o problema de encontrar λ e u verificando

$$-\nabla \cdot (\lambda \nabla u) = f \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (2a)$$

$$u = 0 \text{ em } \Gamma, \quad (2b)$$

$$|\nabla u| \leq \varphi \text{ em } \Omega, \quad (2c)$$

$$\lambda \geq 1 \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (2d)$$

$$(\lambda - 1)(|\nabla u| - \varphi) = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (2e)$$

Relativamente à igualdade (2a) provaremos a seguinte formulação, ligeiramente mais forte,

$$\langle \lambda, \nabla u \cdot \nabla v \rangle_{L^\infty(\Omega)' \times L^\infty(\Omega)} = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in W_0^{1,\infty}(\Omega), \quad (3)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^\infty(\Omega)' \times L^\infty(\Omega)}$ representa o par dualidade entre $L^\infty(\Omega)'$ e $L^\infty(\Omega)$.

O problema (2) foi tratado por Brezis em [2] no caso em que $\varphi \equiv 1$ e f é constante. Este resultado foi estendido em [5] ao caso em que a restrição satisfaz $\Delta\varphi^2 \leq 0$. Um problema análogo, com restrição $\varphi \equiv 1$, com um operador mais geral e f não constante, foi estudado, num sentido generalizado, em [3].

2 Existência do multiplicador de Lagrange

Nesta secção apresentamos o teorema de existência de solução (u, λ) do problema (2), indicando também que u é a solução da inequação variacional (1). Serão enunciados os resultados utilizados na demonstração deste teorema.

Teorema 1 *Dadas funções $f \in L^2(\Omega)$ e $\varphi \in W^{2,\infty}(\Omega)$ minorada por uma constante positiva, o problema (2) tem solução $(u, \lambda) \in W^{1,\infty}(\Omega) \times L^\infty(\Omega)'$. Além disso, se (u, λ) é solução de (2), u resolve a inequação variacional (1).*

Considera-se uma família de problemas aproximados, utilizando uma penalização sugerida em [4],

$$-\nabla \cdot (k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2 - \varphi^2)\nabla u^\varepsilon) = f_\varepsilon \quad \text{em } \Omega, \quad (4a)$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{em } \Gamma, \quad (4b)$$

sendo $k_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^2 , não decrescente, convexa e tal que

$$k_\varepsilon(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } s \leq 0, \\ e^{\frac{s}{\varepsilon}} & \text{se } s \geq \varepsilon, \end{cases}$$

e onde $f_\varepsilon = f * \rho_\varepsilon$, sendo ρ_ε uma função regularizadora e $*$ o operador convolução.

Proposição 2 *Dadas funções $f \in L^2(\Omega)$ e $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ positiva, o problema (4) tem solução única $u^\varepsilon \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$.*

Lema 3 *Dadas funções $f \in L^2(\Omega)$ e $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ com um minorante positivo e $1 \leq q < \infty$, existem constantes positivas C e C_q tais que, se $0 < \varepsilon < 1$ e u^ε é a solução do problema aproximado (4) então*

$$\begin{aligned} \|k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2 - \varphi^2)\nabla u^\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} &\leq C, \\ \|k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2 - \varphi^2)\|_{L^1(\Omega)} &\leq C, \\ \|k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2 - \varphi^2)\nabla u^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)'} &\leq C, \\ \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} &\leq C_q. \end{aligned}$$

Proposição 4 *Dadas funções $f \in L^2(\Omega)$ e $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ com um minorante positivo, a família de soluções $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ dos problemas aproximados (4) possui uma subfamília que converge fracamente em $H_0^1(\Omega)$ para a solução da inequação variacional (1).*

Teorema 5 *Dadas funções $f \in L^2(\Omega)$ e $\varphi \in W^{2,\infty}(\Omega)$ com um minorante positivo, então as soluções u^ε dos problemas aproximados (4) pertencem a um subconjunto limitado de $H_{loc}^2(\Omega)$.*

Proposição 6 *Dadas funções $f \in L^2(\Omega)$ e $\varphi \in W^{2,\infty}(\Omega)$ com um minorante positivo, se u^ε é a solução do problema aproximado (4) e u é a solução da inequação variacional (1), então*

$$u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u \quad \text{em } W_0^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty$$

e também em $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, para $0 \leq \alpha < 1$.

De seguida apresentam-se os passos mais relevantes da demonstração do Teorema 1. Das estimativas apresentadas no Lema 3 resulta que existe uma subfamília de $(u^\varepsilon)_\varepsilon$, também denotada por $(u^\varepsilon)_\varepsilon$, tal que

$$k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2 - \varphi^2)\nabla u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \Upsilon \text{ fraco-* em } L^\infty(\Omega)'$$

$$k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2 - \varphi^2) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda \text{ fraco-* em } L^\infty(\Omega)'.$$

Mostra-se que

$$\langle \Upsilon, \nabla u \rangle_{L^\infty(\Omega)' \times L^\infty(\Omega)} = \langle \lambda, |\nabla u|^2 \rangle_{L^\infty(\Omega)' \times L^\infty(\Omega)},$$

o que permite concluir que

$$\int_{\Omega} k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2 - \varphi^2)|\nabla(u^\varepsilon - u)|^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \Upsilon, \nabla u \rangle - 2\langle \Upsilon, \nabla u \rangle + \langle \lambda, |\nabla u|^2 \rangle = 0. \quad (5)$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2 - \varphi^2)\nabla u^\varepsilon \cdot \nabla v &= \int_{\Omega} k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2 - \varphi^2)\nabla(u^\varepsilon - u) \cdot \nabla v \\ &\quad + \int_{\Omega} k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2 - \varphi^2)\nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f_\varepsilon v, \end{aligned}$$

usando (5) obtém-se (3).

As demonstrações de (2b), (2c) e (2d) são relativamente simples.

Observando que, por definição de k_ε ,

$$(k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2 - \varphi^2) - 1)(\varphi^2 - |\nabla u^\varepsilon|^2)^+ = 0,$$

algumas das relações anteriores permitem concluir (2e).

Os detalhes das demonstrações dos resultados aqui apresentados podem ser consultados em [1].

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CMAT - “Centro de Matemática da Universidade do Minho”, através de fundos do FEDER pelo “Programa Operacional Factores de Competitividade - COMPETE” e pela FCT - “Fundação para a Ciência e a Tecnologia”, Projeto Est-C/MAT/UI0013/2011.

Referências

- [1] A. Azevedo, F. Miranda e L. Santos, Variational and quasivariational inequalities with first order constraints, *J. Math. Anal. Appl.* 397 (2013) 738–756.
- [2] H. Brezis, Multiplicateur de Lagrange en torsion elasto-plastique, *Arch. Rational Mech. Anal.* 49 (1972) 32–40.
- [3] V. Chiadò Piat e D. Percivale, Generalized Lagrange multipliers in elastoplastic torsion, *J. Differential Equations* 114(2) (1994) 570–579.
- [4] C. Gerhardt, On the existence and uniqueness of a warping function in the elastic-plastic torsion of a cylindrical bar with multiply connected cross-section, *Joint Sympos., IUTAM/IMU, Marseille, 1975*, pp. 328–342. Lecture Notes in Math., 503. Berlin: Springer, 1976.
- [5] L. Santos, Variational problems with non-constant gradient constraints, *Port. Math. (N.S.)* 59(2) (2002) 205–248.